**NÚMEROS NATURALES**

**“El sentido numérico y su desarrollo**

Desde los niveles de preescolar uno de los objetivos básicos de la educación matemática será el desarrollo progresivo del "sentido numérico", entendido como "una buena intuición sobre los números y sus relaciones", que debe desarrollarse gradualmente como resultado de explorar los números, usarlos en una variedad de contextos, y relacionarlos entre sí, superando el limitado aprendizaje de los algoritmos tradicionales. "El sentido numérico se concibe como una forma de pensar...

La comprensión y dominio de los números naturales pone en juego muchas ideas, relaciones y destrezas, por lo que podemos considerarlo como un aprendizaje complejo, que no se desarrolla de manera simple y automática. Con la expresión ‘sentido numérico’ hacemos referencia al complejo de nociones y relaciones que configuran el ‘sistema de los números naturales’. Incluye, por tanto, su origen en las actividades humanas de **contar** y **ordenar** colecciones de objetos, los instrumentos materiales inventados para dicha actividad, las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para la solución de problemas prácticos, y el propio sistema lógico–deductivo que organiza, justifica y estructura todos sus elementos.

El dominio intuitivo, flexible y racional de los números que caracteriza la apropiación del sentido numérico por parte del sujeto se inicia en preescolar, con las actividades de clasificación y ordenación de colecciones (uso de relaciones “más que”, “menos que”, “igual”, ...), el aprendizaje de la secuencia numérica hasta la decena, y continúa desarrollándose en los niveles escolares posteriores trabajando con números más grandes, fracciones, decimales, porcentajes, etc.”

(en Godino (2004) Didáctica de los Sistemas Numéricos para Maestros, p. 161)

**SISTEMA AXIOMÁTICO DE PEANO**

El número natural (o entero natural) es el primer concepto matemático creado por el espíritu humano. Todas las ciencias matemáticas se han desarrollado a partir de este concepto que se desarrollará aquí mediante los axiomas dados por el matemático italiano **Péano** (1858-1932). Al conjunto de los números naturales se le denotará **N**.

El sistema axiomático de Peano es esencialmente ordinal, y define al conjunto de los números naturales algebrizado con las operaciones adición y multiplicación.



Consiste en:

* **Términos primitivos:**

Un objeto, que se denota con 1.

Un conjunto N ≠ φ

Una función, llamada “siguiente” o “sucesor”, que se simboliza con “s” o “ϕ”.

1ϕ = 1 +1 = 2 s(1) = 1 + 1= 2 a + 1= s(a) = aϕ

* **Axiomas:**

Axioma 1: el objeto 1 es un elemento de N, es decir: 1 ∈ N

Axioma 2: la función “siguiente” es una función inyectiva de N en N – {1}

s: N → N – {1}

x → s(x) = x +1

Este axioma establece:

1. Todo elemento de N tiene un sucesor y sólo uno.
2. El 1 no es sucesor de ningún elemento de N.
3. Si dos elementos de N tienen el mismo sucesor, entonces son iguales.

Axioma 3: llamado **Principio de inducción completa**.

Si S es un subconjunto de N que contiene al 1, y al siguiente de h siempre que contenga a h, entonces S = N

Es decir, si S ⊆ N es tal que satisface:

**1 ∈ S**

**h ∈ S ⇒ s(h) ∈ S, entonces S = N**

**Conjuntos inductivos:**

**Definición: Un subconjunto A ⊆ R se dice inductivo si:**

1. **1 ∈ A**
2. **x ∈ A ⇒ x +1 ∈ A**

**Definición**: Llamamos conjunto de Números Naturales, y lo simbolizamos con N, al “menor” subconjunto inductivo de R.

**PRINCIPIO de INDUCCIÓN COMPLETA o de RECURRENCIA**

Sea P(n) una proposición asociada a todo número natural n. Si se cumple:

1) la proposición P(1) es verdadera, eventualmente P(1ϕ).

2) si la proposición P(n) es verdadera, entonces también lo es P(n +1) para cualquier n,

Entonces P(n) es verdadera para cualquier número natural n.

Ejemplo: Cuenta la historia que “*J. B. Büttner, maestro de un colegio alemán, castigó a todos los niños a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlos entretenidos y callados un buen rato. Carl Friedrich Gauss obtuvo la respuesta casi de inmediato: 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100 = 5050. Gauss, el niño prodigio, se dio cuenta de que 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, etc., todos suman 101, y que hay 50 de estos pares, resultando 50 × 101 = 5050. La fórmula más general para la suma aritmética de 1 al n es .”.*

¿Cómo verificar si la respuesta de Gauss es correcta? ¿Si esa fórmula es correcta?

1 + 2 + 3 +…. + 99 + 100 = 101 . 50 = 5050

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 +10 = 55 = 5 . 11

1 + 2 + …+ 9 = 10 . 4, 5 = 45

1 + 2 + ….+ n =

Haciendo recurrencia sobre n:

1°) Verificamos para la primera posición: n = 1

1 =

1 = 1 Se verifica

2°) Tomamos n = h

1 + 2 + ….+ h = Esto es Verdadero por hipótesis inductiva.

3°) Tomamos n = h + 1

1 + 2 + …. + (h+1) = [A] V o F

N**o se sabe qué valor de verdad** tiene esa expresión. **Se debe demostrar** que es verdadera, para que la fórmula sea válida.

¿cómo se demuestra que la posición h+1 es verdadera?

Partimos de H.I.:

1 + 2 + ….+ h = que es Verdadera

Si miembro a miembro de esta expresión le sumamos h+1, la expresión será verdadera

1 + 2 + ….+ h+ (h+1) = [B] V

Si los primeros miembros de A y B son iguales, los segundos miembros también deben ser iguales.

A es verdadera.

Como los dos miembros son iguales, se cumple la propiedad para h + 1

Entonces: 1 + 2 + ….+ n = es válida

O bien:

1°) Verificar que la propiedad se cumple para n = 1

Si n = 1: = 1 se verifica.

2°) Suponer que se cumple para n = h

1 + 2 + 3 + ….+ h = es verdadera por hipótesis inductiva

3°) Demostrar que se cumple para n = h + 1

1 + 2 + 3 + ….+ (h +1) = no sabemos es verdadera o no. [A]

Para demostrar que esta última expresión es verdadera, partiendo de la hipótesis inductiva:

1 + 2 + 3 + ….+ h = que es verdadera

Sumamos miembro a miembro el término que se encuentra en la posición h + 1

1 + 2 + 3 + ….+ h + (h +1) = + (h +1) que es verdadera [B]

Comparando los primeros miembros de [A] y [B], son iguales, por lo tanto, si los segundos miembros también lo son, como [B] es verdadera, [A] también lo es.

= + (h +1)

=

=

=

= Son iguales. Queda demostrado que: 1 + 2 + 3 + ….+ n =

Teniendo en cuenta lo enunciado en Cuaderno 1 – Álgebra I de Wall, “Los Enteros Naturales”, página 70, N = {0 , 1 , 2 , 3 , ….} y N\* = N – {0}

El conjunto de los números naturales N definimos dos operaciones: Adición y Multiplicación.

Otro ejemplo (es ejercicio del práctico):

Demostrar que:

i-ésimo n-ésimo i= 1 , 2 , 3 ,…., n

n = 1

se verifica

n = h

verdadera por H.I.

n = h+1

¿V o F?

Para demostrar que esta expresión es verdadera partimos de la H.I.

Se le suma miembro a miembro el término que está en la posición h+1

V

Los primeros miembros son iguales, verificamos la igualdad de los segundos miembros:

Queda demostrado que: es válida.

En N (conjunto de números naturales definido por el Sistema Axiomático de Peano) se define una relación de equivalencia:

N/= conjunto cociente

En este conjunto se definen las operaciones y producto.

Para facilitar la notación se considera N es lo mismo que N/=.

**Adición de números naturales**

***Definición***

*A todo par ordenado (x, y)*∈ ***N2,*** *se asocia un número natural, denominado* ***suma*** *de x e y, denotado x + y, y definido por recurrencia como sigue:*

*a) x + 0 = x;*

*b) supuesto definido x+ y, se define x+ s(y)*  *de la siguiente forma x+s(y) = s(x+ y)* *.*

Nota: s(y) = = y + 1

2 + 3 = 5

2 + s(3) = s(2 + 3) = s(5) = 6

2 + 4 = 6

En esta definición, x es fijado arbitrariamente en **N**. La recurrencia se hace sobre y. Si se designa por A al conjunto de los enteros naturales y tales que la adición x + y esté definida, se puede ver por (a) que 0∈A y por (b) que y∈A implica s(y) ∈ A.

Luego A = N y la adición queda definida por recurrencia para todos los enteros naturales. Para todo x∈N y para y = 0

x + s(0) = s(x + 0) = s(x)

de manera que: x + 1 = s(x) .

El siguiente de x es entonces x + 1.

De acuerdo a lo dicho, se dice que la adición es una operación cerrada en N, o que es una **ley de composición interna en N** o que es una **ley cerrada en N**:

+ : N x N → N

(x , y) → x + y

Esta operación verifica las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro.

**Asociatividad**: **∀x ∈N, ∀y ∈N, ∀z ∈N: (x + y) + z = x + ( y + z)**

Por recursividad sobre z:

Si consideramos:

z = 0

(x + y) + 0 = x + (y + 0)

Por definición de suma: x + y = x + y la propiedad se verifica.

z = h

(x + y) + h = x + (y + h) Verdadera por hipótesis de recurrencia.

z = h + 1 = s(h)

(x + y) + s(h) = x + (y + s(h))

1° miembro:

(x + y) + s(h) = s[(x + y) + h] por definición de suma

= s[x + (y + h)] por hipótesis de recurrencia

2° miembro:

x + (y + s(h)) = x + s(y + h) = s[x + (y + h)] por definición de suma

Entonces: (x + y) + s(h) = x + (y + s(h))

Queda demostrada la propiedad asociativa de la adición en N.

**Elemento Neutro**: ∃! e ∈ N, ∀x ∈N : e + x = x + e = x

e = 0 , 0 es elemento neutro.

Por definición de la adición, 0 es ya elemento neutro a derecha. Se demuestra, por recurrencia sobre x, que:

(1) 0 + x = x.

Si x = 0: 0 + 0 = 0 , pues 0 es elemento neutro a derecha.

0 = 0

Si x = h: 0 + h = h Verdadera por HI

Si x = h + 1= s(h): 0 + s(h) = s(h) se debe demostrar que es verdadera

(2) Se supone (1) verdadera para x, y se debe demostrar que lo es para s(x).

Se tiene

1° miembro: 0 + s(h) = s(0 + h) (definición de adición)

= s (h) por HI

2° miembro

1. queda entonces demostrado por recurrencia para todo x∈**N.**

**(N , +) es un monoide conmutativo.**

**Multiplicación de los números naturales.**

Se introduce ahora la multiplicación.

***Definición****.*

*A todo par ordenado (x, y)*∈ ***N2****, se le asocia un número natural, denominado producto de x por y, denotado xy, y definido por recurrencia (sobre y) como sigue:*

*a) x.0 = 0*

*b) Se supone definido xy, se define x s(y)* *por x s(y)* = *xy + x*

x s(y) = x (y + 1) = xy + x

La multiplicación también es una operación cerrada en N, o que es una ley de composición interna en N:

**.** : N x N → N

(x , y) → x y

Esta operación verifica las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro.

Las demostraciones son parte del Trabajo Práctico N° 3.

**Ejercicio N° 4:** Demuestre que

1. 1.*n* = *n.1 = n* ∀*n*∈ *N*
2. Demuestre las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación en **N**.

**Propiedad Asociativa de la multiplicación en N:**

. es asociativa en N ⇔ ∀x ∈ N, ∀y ∈ N, ∀z ∈ N: ( x y) z = x ( y z)

**Demostración**

Haciendo recurrencia sobre z

z = 0

( x y) 0 = x ( y 0)

0 = x 0 1er y 2do miembro: definición de multiplicación (a)

0 = 0 2do miembro: definición de multiplicación (a)

Se verifica

z = h

( x y) h = x ( y h) Verdadero por H.I. o Hipótesis de recurrencia

z = h +1 = s(h)

( x y) s(h) = x ( y s(h))

1er miembro: ( x y) s(h) = (xy) h + xy = x (yh) + xy

(definición de multiplicación, hipótesis inductiva)

2do miembro: x ( y s(h)) = x ( y (h + 1)) = x (y h + y) = x (yh) + xy

(definición de multiplicación, distributividad de la multiplicación respecto a la suma)

La asociatividad de la multiplicación en N se comprueba.

(N , **.** ) es un monoide conmutativo.